

# کاربرد ریاضیات دیرستان در

## اقتصاد



### اشاره

چند سالی است که ریاضی می‌خوانید. در دوره اول متوسطه با مباحثی مثل معادله خط و حل معادله درجه یک آشنا شدید. در دوره دوم متوسطه نیز حل معادله درجه ۲ و بالاتر و تابع درجه ۲ و تابع خطی مطرح می‌شود و در همه این سال‌ها خیلی از هم‌کلاسی‌های شما دانش‌آموزان عزیز از ما می‌پرسند: معادله خط و تابع به چه درد می‌خورند؟ چطوری به وجود آمده‌اند؟ و چه کاربردی دارند؟ حتی بعضی از شماها به شوخی می‌گویید: دانشمندان بی‌کار بوده‌اند!

البته به شما حق می‌دهم، چون انسان باهوش و خردمند به دنبال چرایی هر پدیده‌ای می‌گردد. با مطالعه تاریخ علم متوجه می‌شوید که بسیاری از مطالب علمی را انسان با توجه به نیازش کشف کرده است که این موضوع در مورد ریاضی هم صدق می‌کند. در این مقاله با ارائه چند مثال ساده کاربرد این مطالب را در اقتصاد بیان می‌کنیم و به این سؤال شما مختصر پاسخی می‌دهیم.



جابر مختاری دهقادی  
دبیر ریاضی استان لرستان  
شهرستان دورود

### مقدمه

در هزینه‌ای مشاهده شد، می‌توان آن را به‌عنوان این گروه از هزینه‌ها طبقه‌بندی کرد. مشخصات مزبور از این قرارند:

۱. هزینه‌ها در سطوح متفاوت تولید در کل ثابت هستند.
۲. سهم هزینه ثابت یک واحد کالا با افزایش تعداد تولید کالا کاهش می‌یابد و برعکس.
۳. کنترل وقوع این هزینه‌ها از طریق مدیران اجرایی صورت می‌پذیرد.

نمونه‌های بارز و مشخص این هزینه‌ها عبارت‌اند از: حقوق مدیران تولید؛ استهلاک ساختمان و ماشین‌آلات؛ بیمه ساختمان و ماشین‌آلات؛ اجاره محل کارخانه؛ و سایر موارد مشابه.

در این مقاله کاربردی از معادله خط و حل معادله و تابع را در اقتصاد مطرح خواهیم کرد. اما نخست چند تعریف مقدماتی را از علم اقتصاد بیان می‌کنیم. می‌دانیم در هر کارخانه‌ای مقدار تولید محصول و عرضه آن به بازار، به قیمت محصول، کیفیت آن، و قدرت خرید مردم بستگی دارد. در هر کارخانه‌ای هزینه‌ها (مخارج) به دو دسته تقسیم می‌شوند که عبارت‌اند از: هزینه‌های متغیر و هزینه‌های ثابت.

### هزینه‌های ثابت

هزینه‌هایی هستند که با تغییر حجم تولید تا سطح مشخصی از تولید تغییر نخواهند کرد. باید بدانید که به‌طور کلی هزینه‌های ثابت مشخصاتی دارند که هرگاه

**مثال ۱.** فرض کنید هزینه اجاره کارخانه‌ای ماهانه ۱۵۰ میلیون ریال است. اولاً هزینه اجاره در کل ثابت است. یعنی چه یک عدد کالا تولید شود، چه ۱۰۰۰ عدد، هیچ‌گونه تغییری در کل این هزینه به وجود نخواهد آمد. ثانیاً با افزایش تولید، سهم هزینه هر یک واحد کالا کاهش پیدا می‌کند. فرض کنید تولید کارخانه ۱۰۰ عدد باشد. اگر بخواهیم بگوییم سهم هر واحد کالا از کل ۱۵۰ میلیون ریال هزینه اجاره چقدر است، به این صورت عمل می‌شود:  $150000000 \div 100 = 1500000$  که سهم هر کالا ۱۵۰۰۰۰۰ ریال خواهد شد. یا اگر ۲۵۰ عدد کالا تولید شود، سهم اجاره هر یک واحد کالا  $150000000 \div 250 = 600000$  ریال تعیین می‌شود. ملاحظه می‌کنید که با افزایش تعداد تولید، سهم یک واحد کالا از هزینه ثابت کاهش پیدا می‌کند.

مجدداً تأکید می‌شود، هزینه‌های ثابت در کل در سطوح متفاوت تولید ثابت است، ولی با افزایش تولید سهم هر یک واحد تولید کاهش خواهد یافت. و برعکس با کاهش تولید، سهم هر یک واحد تولید از هزینه ثابت افزایش می‌یابد. در ضمن رخ دادن هزینه‌های ثابت و مبلغ آن‌ها در اختیار و وابسته به تصمیم‌گیری مدیران اجرایی است.

### هزینه‌های متغیر

هزینه‌های متغیر هزینه‌هایی هستند که کل مبلغ آن‌ها با تغییر در سطح تولید و میزان تولید تغییر می‌کند. یعنی با افزایش مقدار تولید و حجم تولید، این هزینه‌ها در کل افزایش می‌یابند و با کاهش در میزان تولید، این هزینه‌ها در کل کاهش خواهند یافت. نمونه مشخص این هزینه‌ها مواد مستقیم و دستمزد مستقیم هستند. هزینه‌های متغیر نیز ویژگی‌ها و مشخصه‌هایی به شرح زیر دارند:

۱. این هزینه‌ها در کل ارتباط مستقیم با تولید دارند. یعنی با افزایش تولید، افزایش و با کاهش تولید، کاهش می‌یابند.
  ۲. هزینه متغیر یک واحد کالا ثابت است، حتی اگر تعداد تولید نیز کاهش یا افزایش پیدا کند.
  ۳. به شکل ساده و آسان قابل تخصیص به دایره تولید هستند.
- در ادامه مشخصه‌های هزینه‌های متغیر را در مثال ۲ بررسی می‌کنیم.

**مثال ۲.** فرض کنید برای ساخت ۴ عدد میز ۶ متر مربع چوب نیاز است. حال اگر بخواهیم ۸ عدد میز تولید کنیم، حتماً به ۱۲ متر مربع چوب که مواد اولیه و مستقیم تولید محسوب می‌شود، نیاز داریم. می‌بینید که با افزایش میزان تولید، هزینه مواد مستقیم نیز افزایش پیدا خواهد کرد. ولی باید توجه داشته باشید، برای ساخت یک میز، ۱/۵ متر مربع چوب نیاز است.  $(1/5 = 4 \div 6)$  که هیچ‌گاه با افزایش تولید، میزان مواد مستقیم ساخت یک واحد تغییر نمی‌کند. یعنی ساخت یک عدد میز حتماً ۱/۵ متر مربع چوب نیاز دارد و با چوب کمتر و یا با چوب بیشتر نمی‌توان میز ساخت. بنابراین هزینه مواد مستقیم در یک واحد، ثابت است. در ضمن این هزینه به راحتی قابل پیش‌بینی در ساخت محصول است و می‌توان هزینه چوب مصرفی را در ساخت میز مشاهده کرد.

**مثال ۳.** هزینه‌های ثابت و هزینه‌های متغیر یک نانواپی را بنویسید.

♦ **پاسخ:** هزینه‌های ثابت عبارت‌اند از: اجاره مغازه، اجاره انبار آرد، هزینه تلفن، حقوق کارگران نانواپی، هزینه‌های بیمه آتش‌سوزی، و هزینه استهلاک دستگاه‌های موجود در نانواپی.

هزینه‌های متغیر نیز عبارت‌اند از: هزینه خرید آرد، نمک و افزودنی‌های دیگر، هزینه آب، برق و گاز که همه این موارد به میزان تولید بستگی دارند.

### تمرین

هزینه‌های ثابت و متغیر یک کارگاه شیرینی‌پزی را مشخص کنید.

**مثال ۴.** خاطره‌ای را برای شما دانش‌آموزان عزیز نقل می‌کنم. روزی در دفتر دبیرستان نشسته بودم، خواهرم که کارمند حسابداری یک فروشگاه است زنگ زد و گفت کالایی داریم که قیمت فروش آن ۱۴۴۰ تومان ثبت شده است. فروشگاه ۲۰ درصد سود روی کالا محاسبه می‌کند، ولی در حال حاضر فاکتور خرید مفقود شده است و قیمت خرید کالا را نمی‌دانم. چگونه باید آن را محاسبه کنیم؟ اگر دقت کنید، این مشکل برای هر فروشگاه‌ای ممکن است پیش بیاید. برای پیدا

کردن مجهول مسئله ابتدا باید مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم.

فرض کنید قیمت خرید کالا  $x$  باشد. در این صورت سود فروشگاه  $x/20\%$  و مجموع قیمت خرید و سود برابر با قیمت فروش است. به عبارت دیگر:  $x + 0/20x = 1440$  که همان معادله درجه یک است و ما باید آن را حل کنیم:

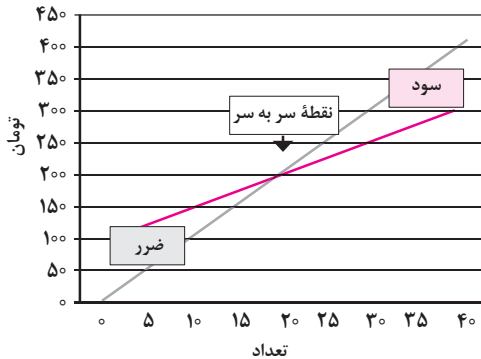
$$x + 0/20x = 1440$$

$$1/20x = 1440$$

$$x = \frac{1440}{1/20} = 1200$$

پس قیمت خرید کالا ۱۲۰۰ تومان است.

را برای خود محاسبه کند، زیرا این کار به آن‌ها نشان می‌دهد، تعداد کالاهای تولید شده‌ای که باید بفروشند تا بتوانند هزینه‌های ثابت و متغیر صورت گرفته را جبران کند، چقدر است.



فرض کنید در یک بنگاه اقتصادی تولید کیف دستی، هزینه کل ساخت ۱۰ کیف در یک ماه ۲۰۰ هزار تومان شده است. اگر صاحب این کسب و کار بتواند تمامی این ۱۰ کیف را به قیمت ۲۰ هزار تومان بفروشد، به نقطه سر به سر رسیده است. یعنی ۲۰۰ هزار تومان درآمد داشته است که با میزان کل هزینه‌ها برابر است. به بیان دیگر، نه سود کرده است و نه زیان. پیدا کردن و تحلیل نقطه سر به سر صاحب این کسب و کار نشان می‌دهد که اگر این فرد در هر سری از تولیداتش موفق به فروش تمام کیف‌ها به قیمت ۲۰ هزار تومان نشود، ضرر می‌کند و برای ادامه کارش احتیاج دارد، یکی یا چند تا از موارد زیر را به کار گیرد:

- هزینه‌های ثابتش را کاهش دهد (مثل هزینه اجاره کارگاه تولیدی).
- هزینه‌های متغیرش را کاهش دهد (هزینه تهیه مواد اولیه برای تولید هر کیف).
- قیمت فروش هر کیف را افزایش دهد.

### معادله عرضه

قانون عرضه بیانگر این واقعیت است که بین مقدار عرضه یک کالا و قیمت آن رابطه مستقیمی وجود دارد. بدین معنی که اگر قیمت یک کالا افزایش یابد، مقدار عرضه آن نیز افزایش می‌یابد. نمودار ۲ رابطه عرضه را نشان می‌دهد.

### تمرین

در یک کارخانه تولید نوعی خودکار، وقتی قیمت یک خودکار ۱۰۰۰ تومان است، روزانه ۴۰۰۰۰ عدد فروخته (تقاضای بازار) می‌شود و در صورتی که ۸۰۰ تومان باشد، ۶۰۰۰۰ تقاضا می‌شود. تابع تقاضای این محصول را بنویسید (هر کارخانه‌ای بازاریاب و مدیر فروش دارد که مسئولیت ارزیابی بازار با آن‌هاست).

**راهنمایی.** معادله خطی را که از نقاط (۱۰۰۰ و ۴۰۰۰۰) و (۸۰۰ و ۶۰۰۰۰) می‌گذرد، بنویسید.  $x$  نشان‌دهنده تقاضا و  $y$  نشان‌دهنده قیمت کالا است.

### مثال ۵. کارخانه قند وقتی قیمت قند ۲۵۰۰ تومان

باشد، ۱۰۰۰۰۰ کیلو قند به بازار عرضه می‌کند و وقتی قیمت ۳۰۰۰ تومان می‌شود، ۱۲۰۰۰۰ کیلو قند به بازار عرضه می‌کند. معادله عرضه را بنویسید.

معادله خطی را که از دو نقطه (۲۵۰۰ و ۱۰۰۰۰۰) و (۳۰۰۰ و ۱۲۰۰۰۰) می‌گذرد، می‌نویسیم:

$$m = \frac{120000 - 100000}{3000 - 2500} = 40$$

$$y - 2500 = 40(x - 100000)$$

$$y = 40x - 3997500$$

### نقطه سر به سر

در اقتصاد نقطه‌ای را که در آن قیمت کالای عرضه شده با قیمت کالای تقاضا شده برابر است، نقطه سر به سر می‌گویند. هر واحد تجاری باید نقطه سر به سر

که در آن،  $x$  تعداد کالا و  $p$  قیمت بر حسب تومان است. بخش مالی شرکت هزینه تمام شده تولید (معادله هزینه) همان کالا را به صورت  $c = 72000 + 60x$  ارائه کرده و مدیریت شرکت درصدد پیدا کردن مقدار تولیدی است که بیشترین سود را عاید شرکت کند. از معادله تقاضا قیمت  $p$  را به دست می‌آوریم:

$$p = \frac{6000 - x}{30} = 200 - \frac{1}{30}x \quad (1)$$

تابع درآمد به صورت حاصل ضرب تعداد کالا در قیمت فروش است:

$$R(x) = x \cdot p \Rightarrow$$

$$R(x) = x(200 - \frac{1}{30}x) = 200x - \frac{1}{30}x^2$$

تابع سود حاصل تفاضل هزینه از درآمد است و آن را با  $p(X)$  نشان می‌دهیم:

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

$$P(x) = 200x - \frac{1}{30}x^2 - (72000 + 60x)$$

$$P(x) = -\frac{1}{30}x^2 + 140x - 72000$$

در نگاه اول ممکن است فکر کنید هرچه تولید و فروش کالای مورد نظر بیشتر باشد، سود شرکت بیشتر می‌شود و به این همه ریاضی و حساب و کتاب نیازی نیست. حال با اطلاعاتی که از تابع درجه ۲ داریم، می‌دانیم نمودار تابع  $P(x)$  سهمی رو به پایین است و مقدار ماکزیمی در نقطه  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-140}{2(-\frac{1}{30})} = 2100$  دارد.

یعنی شرکت برای به دست آوردن بیشترین سود باید ۲۱۰۰ تا از کالای مورد نظر تولید کند که در این صورت  $p(2100) = 75000$  تومان سود می‌کند. در ضمن قیمت

فروش هر کدام از کالاهای تولیدی از رابطه حساب می‌شود

که برابر است با:  $p = 200 - \frac{1}{30}(2100) = 130$  تومان و

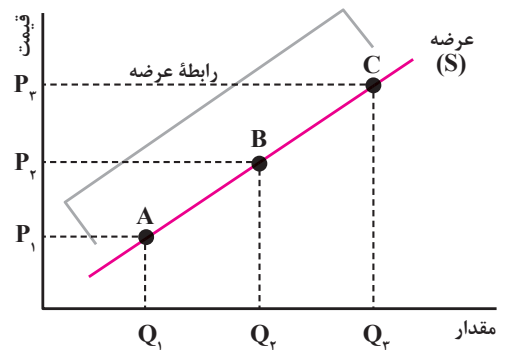
درآمد حاصل از فروش این ۲۱۰۰ کالا  $R(2100) = 273000$  تومان می‌شود. حال باید توجه داشت که ماکزیمی درآمد وقتی

حاصل می‌شود که شرکت ۳۰۰۰ عدد کالا تولید کند و

در این صورت درآمد شرکت  $R(3000) = 300000$  تومان می‌شود. جالب است که بدانید، با این تولید سود شرکت

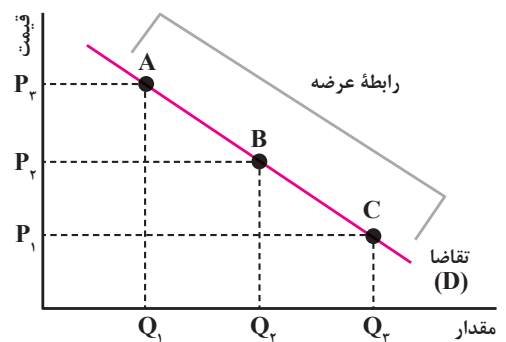
$p(3000) = 48000$  می‌شود. یعنی شرکت اگر ۳۰۰۰

تا از محصول تولید کند، کمتر سود می‌کند. حال اگر



### معادله تقاضا

قانون تقاضا بیان می‌کند، در صورت برابر بودن سایر عوامل، هرچه قیمت یک کالا بالاتر باشد، افراد کمتری متقاضی آن کالا خواهند بود. مقداری از کالا که خریداران با قیمتی بالاتر می‌خرند، کمتر است. در نتیجه، مردم به طور طبیعی از خرید محصول چشم‌پوشی می‌کنند. نمودار زیر نشان می‌دهد که شیب منحنی به سمت پایین حرکت می‌کند (شیب منفی).



**مثال ۶.** اگر معادله‌های تقاضا و عرضه به صورت زیر باشند، نقطه سر به سر (تعادل بازار) را به دست آورید.

$$y = 2/5x + 1/5 \quad \text{معادله عرضه}$$

$$y = -x + 5 \quad \text{معادله تقاضا}$$

**راهنمایی.** دستگاه دو معادله و دو مجهول تشکیل دهید و پاسخ را به دست آورید (پاسخ:  $y=4$  و  $x=1$ ).

**مثال ۷.** بخش تحقیق و بازاریابی یک شرکت پس از

بررسی وضعیت بازار در مورد یک کالا که توسط شرکت تولید می‌شود، معادله تقاضا را مدل سازی ریاضی می‌کند و به مدیریت تحویل می‌دهد.

$$x = 6000 - 30p \quad \text{معادله تقاضا}$$

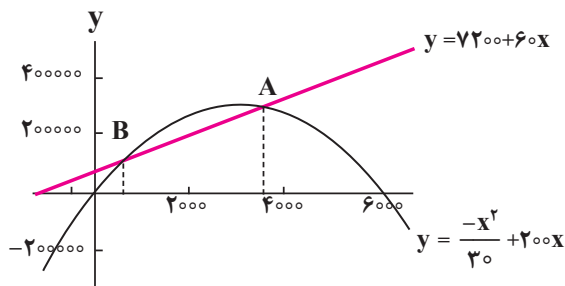
### تمرین ۳

در چه بازه‌ای از تولید شرکت سود می‌کند

#### نتیجه

در حل مثال‌ها روشن شد که مطالب ریاضی، به‌خصوص معادله و تابع، در زندگی روزمره و رشته‌های دانشگاهی اقتصاد و بازرگانی کاربرد دارد. ولی نکته اینجاست که ما باید مدل‌سازی را یاد بگیریم و بتوانیم مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم تا آموخته‌های خود را با زندگی روزمره تطبیق دهیم و در این صورت احساس نیاز به یادگیری در ما ایجاد می‌شود. همان‌طور که دیدید، از معادله خط و حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی، معادله درجه یک، تابع درجه ۲ و نمودار تابع استفاده شد. بسیاری از مباحث را شما می‌خوانید، ولی بعداً و در سال‌های بعد یا دوره‌های تحصیلی بعدی از آن‌ها استفاده می‌کنید.

نمودار تابع هزینه و درآمد را رسم کنیم و با دقت به آن فکر کنیم، همه این مطالب را می‌بینیم.



سهمی، نمودار تابع درآمد و خط نمودار تابع هزینه است. محل برخورد دو نمودار  $x=600$  و  $x=3600$  است که نشان‌دهنده نقطه سر به سر، یعنی نقاط A و B هستند (درآمد و هزینه برابر و به عبارت دیگر، سود شرکت صفر تومان است).

### تمرین ۱

اگر شرکت ۶۰۰ عدد کالا تولید کند، باید به چه قیمتی بفروشد تا ضرر نکند؟

### تمرین ۲

با چه تولیدی درآمد شرکت صفر می‌شود.

#### \* منابع

۱. پورکاظمی، محمدحسین (۱۳۹۲). ریاضیات عمومی و کاربردهای آن (ج ۲). نشر نی. تهران. چاپ شانزدهم.
۲. آقامیری، احسان (۱۳۹۲). اقتصاد خرد. انتشارات راهیان ارشد. تهران. چاپ اول.

## پرسش‌های بیکار جو! ۴

در مورد عدد سه رقمی  $\overline{abc}$  می‌دانیم که:  $c = 41 - 7b = 49 - (a - 5)$ ، باقی‌مانده تقسیم این عدد بر ۱۳ کدام است؟

الف) ۸

ب) ۹

ج) ۱۰

د) ۱۱

ه) ۱۲